משפט הפונקציה הסתומה  
(Implicit Function Theorem)

תהי פונקציה בעלת שתי נגזרות חלקיות רציפות המוגדרת עבור כך ש ו. אזי קיים ופונקציה יחידה כך שf מוגדרת עבור , , עבור וf גזירה ו רציפה עבור .

**דהיינו** אפשר לפתור עבור y כפונקציה של x.

# הוכחה

אפשר להניח ש. לכן בסביבה שלמה של *, נגיד .  
הפונקציה הינה פונקציה עולה עבור . לכן .𝑙 פונקציה עולה עבור רציפות ואילו . לכן ע"פ הרציפות של ו קיים כך ש עבור .  
לפי משפט ערך הביניים לכל קיים ערך של y בין ו כך ש. קיים אך ורק ערך אחד של y כזה שכן עבור . נקרא לנקודה זו ,*

עכשיו, נוכיח ש רציפה עבור ומתקיים :  
קח ו כך ש. אם נכתוב , מתקיים  
עבור .  
מכיוון שהנגזרות החלקיות רציפות, גם רציפה.

ניתן להשתמש במשפט הזה למצוא נגזרת של פונקציה הפוכה:

זה נכון לכל מספר של משתנים:

# דוגמה

הראה שהמשוואה מגדירה y כפונקציה של x, קרוב ל וחשב

# משפט(כופלי לגרנז')

יהי תחום. תהיינה F,G פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות המוגדרות על D ונניח ש(כלומר לפחות אחת מהנגזרות החלקיות של G לא מתאפסת ב) עבור .  
אזי הנקודות של S בהן F מקבלת מקסימום או מינימום מקומי(ביחס לS) נמצאות בין הפתרונות למערכת

## הוכחה

נניח שלF יש מקסימום(או מינימום) מקומי (ביחס ל) ב. אזי או או , נגיד האחרון. אזי בסביבת מתקיים (לפי משפט הפונקציה הסתומה) ו. ברור ש.*נשים , .*

# דוגמה

# דוגמה

*אבל אם לא יכול להיות , ולכן אין פתרון למשוואות.*

*הסיבה לכך שאין פתרון היא וזה בדיוק התנאי שפסלנו במשפט.*

# דוגמה

למצוא את המקסימום של על האליפסה .

לכן הנקודות האפשריות הן , וזה די ברור שאחת נותנת מינימום והשנייה מקסימום.